Soluzioni dell'esame di Complementi di Matematica appello del 6.2.2004

a cura di Monica Castiglioni matr. 612164

1)

a) La matrice della relazione è:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) La più piccola relazione riflessiva contente R è

$$R \cup I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La più piccola relazione simmetrica contente RUI è (RUI)U(R°UI), ovvero RUI stessa (le matrici di R e di RUI sono già simmetriche)

La più piccola relazione transitiva contente R è $RUR^2UR^3UR^4$

La più piccola relazione di equivalenza è quindi $(RUI)U(RUI)^2U(RUI)^3U(RUI)^4$

$$(R \cup I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = RUI$$

Poiché $(R \cup I)^2 = R \cup I$ anche tutte le successive potenze di R U I sono uguali. Di conseguenza R U I è la più piccola relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) contente R.

2)
a) Equazione parametrica di r:

$$r = \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Vettore direzione:
vr = (1,-1,1)

Equazione parametrica di s:

$$s = \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 \\ z = -k \end{cases}$$

Vettore direzione:
vs = (1,0,-1)

a) Mutua posizione delle rette r e s

* Sono parallele se e solo se i loro vettori direzione sono proporzionali.
vr e vs non sono proporzionali, => le rette non sono parallele.

* Sono ortogonali se e solo se il prodotto scalare dei loro vettori direzione dà zero.
vr vs = (1,-1,1)(1,0,-1) = 1 – 1 = 0 => sono ortogonali

* Sono incidenti se e solo se il sistema delle loro equazioni ha soluzioni (una se sono incidenti, infinite se sono condenti).

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \\ x = 1 + k \\ y = 1 \\ z = -k \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 1 + k \\ -t = 1 \\ t = -k \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -1 \\ k = 1 \\ -1 = 2 \end{cases}$$

L'ultima equazione è impossibile. => le rette sono sghembe.

Le rette sono ortogonali e sghembe.

b) Nella geometria euclidea, per 3 punti non allineati passa uno e un solo piano. Quindi per trovare il piano contenente la retta r e il punto B=(0,1,1), prendo due punti P e Q della retta r e impongo che il piano passi per P, Q e B.

Posto t = 1, P = (1,-1,1)
Posto t = -1, Q = (-1,1,-1)

L'equazione generica del piano è $ax + by + cz - d = 0$

$$\begin{cases} a - b + c - d = 0 \\ -a + b - c - d = 0 \\ b + c - d = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

L'equazione del piano è dunque: $2x + y - z = 0$

3)
a) I tre vettori sono una base per $\mathbf{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti, cioè se la matrice A ha determinante $\neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ -16 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = k(k) - 16(1) = k^2 - 16$
$\det A = 0 \iff k^2 = 16$ cioè $k = \pm 4$

Quindi la terna è base di $\mathbf{R}^3$ per ogni $k \neq \pm 4$.

b) Il vettore $\underline{b}$ si può scrivere come combinazione lineare dei tre vettori $\underline{a}_i$ ogni volta che la terna $\underline{a}_i$ è una base per $\mathbf{R}^3$, quindi per ogni $k \neq \pm 4$.

c) Il sistema lineare ha per matrice dei coefficienti la matrice A e per vettore dei termini noti il vettore b.

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & -16 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

det A = $k^2 - 16$

* Per ogni $k \neq \pm 4$ per il *teorema di Cramer* il sistema ha una e una sola soluzione.

* Per k = 4

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -16 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -16 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La prima e la terza colonna sono uguali (linearmente indipendenti), quindi la colonna dei termini noti "non aggiunge niente di nuovo" al sistema, per cui rk A = rk (A|b). Quindi per il *teorema di Rouché-Capelli* il sistema ha soluzioni.
Precisamente ha ∞^x soluzioni dove

x = ordine della matrice – rk (A) = 3 -2 = 1 dove rkA = 2 perché il minore

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ha determinate diverso da 0.

Quindi il sistema, per k = 4, ha ∞^2 soluzioni.

* Per k = -4

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -16 & 4 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

rk A = 2
mentre rk (A|b) = 3 perché la prima, la seconda e la quarta colonna sono linearmente indipendenti.
Poiché rk A ≠ rk(A|$\underline{b}$), per il *teorema di Roucé-Capelli* il sistema non ha soluzioni.

4) Moltiplicando la matrice per il vettore delle incognite si ha il vettore che definisce l'applicazione lineare.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + kz \\ 3y + kz \\ kz \end{pmatrix}$$

L'applicazione lineare è quindi definita come:

f(x,y,z)=(3x+kz, 3y + kz, kz)

a) isomorfismo = applicazione biunivoca (ovvero iniettiva e suriettiva)

Il teorema della dimensione dice:

dim Ker f + dim Im f = dim Dom f

* f è iniettiva se e solo se dim Ker f = 0, da cui

$$\begin{cases} 3x + kz = 0 \\ 3y + kz = 0 \\ kz = 0 \end{cases}$$

Per $k \neq 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

l'unica soluzione è il vettore (0, 0, 0), quindi dim Ker f = 0, => f è iniettiva.

Per $k = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

i vettori soluzione sono (0, 0, t), per cui dim Ker f = 1. => f non è iniettiva => f non è biunivoca.

* f è suriettiva se e se solo dim Im f = dim Codom f

In questo caso dim Codom f = 3

Per $k \neq 0$ dim Ker f = 0 si ha

0 + dim Im f = 3 = dim Codom f

quindi dim Im f = dim Codom f = 3

Quindi f è un isomorfismo per ogni $k \neq 0$.

b) La matrice di passaggio P (triangolare alta) è:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det P = 1, quindi det P^{-1} = 1.

L'inversa P^{-1} della matrice P è:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_T$$

Cioè:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica che $P\,P^{-1} = I_3$.

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base {(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)} è:

$$M^B{}_B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

c) A è diagonalizzabile se:

1. gli autovalori sono regolari
2. la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è uguale all'ordine di A (3)

Per trovare gli autovalori λ si risolve il sistema det $(\lambda I - A) = 0$, dove la matrice $(\lambda I - A)$ è triangolare superiore.

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & -k \\ 0 & \lambda - 3 & -k \\ 0 & 0 & \lambda - k \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - k)$

Gli autovalori sono:
$\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = 3$
$\lambda_3 = k$

* Per $k = 3$

$ma(3) = 3$
$mg(3) = 3 - rk(3I - A) = 3 - 1 = 2$

perché i due vettori riga non nulli sono uguali:

$$(3 I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $ma(3) \neq mg(3)$ l'autovalore 3 non è regolare, la matrice non è diagonalizzabile.

* Per $k \neq 3$

$ma(k) = 1 = mg(k)$ => è regolare

$ma(3) = 2$

$mg(3) = 3 - rk(3I - A) = 3 - 1 = 2$

perché i tre vettori riga sono tutti linearmente dipendenti:

$$(3\,I - A\,) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 3-k \end{bmatrix}$$

Quindi ma (3) = 2 = mg (3) => è regolare.

Poiché la somma delle molteplicità algebriche è 3, l a matrice è diagonalizzabile per $k \neq 3$.

* Per k = 0 la matrice è diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5)

a)
$\partial f(x,y) / \partial x = 2x + 2xy$
$\partial f(x,y) / \partial y = 4y + x^2$
$\partial^2 f(x,y) / \partial x^2 = 4$
$\partial^2 f(x,y) / \partial y^2 = 4$
$\partial^2 f(x,y) / \partial x \partial y = 2x$
$\partial^2 f(x,y) / \partial y \partial x = 2x$

$$H\,f\,(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 2x \\ 2x & 4 \end{bmatrix}$$

b) Punti critici (o stazionari)

$$\begin{cases} \partial f(x,y) / \partial x = 0 \\ \partial f(x,y) / \partial y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - x^3/4 = 0 \\ y = -x^2/4 \end{cases}$$

Dalla I equazione si ha :

$2x - x^3/4 = 0$

* Se $x = 0 \Rightarrow y = 0$, quindi un punto critico è $O=(0,0)$

* Se $x \neq 0$, la I equazione si può dividere per x:

$2 - x^2/4 = 0$

da cui $x = \pm 2\sqrt{2}$

da cui $y = -2$

quindi gli altri due punti stazionari sono:

$A = (2\sqrt{2}, -2)$ e $B = (-2\sqrt{2}, -2)$

Natura dei punti stazionari:

*** O**
$\det H f(0,0) = 16 - 0 = 16 > 0$
$\partial^2 f(x,y) / \partial x^2 = 4 > 0$

O è un punto di minimo.

*** A**
$\det H f(2\sqrt{2}, -2) = 16 - 4(2\sqrt{2})^2 = -16 < 0$

A è un punto di sella.

*** B**
$\det H f(2\sqrt{2}, -2) = 16 - 4(-2\sqrt{2})^2 = -16 < 0$

B è un punto di sella.

****

Domande, correzioni, feedback costruttivo: xmcarter@email.it
Sito internet: http://it.geocities.com/xfabuland/

La Matematica è l'alfabeto del quale
Dio ha scritto l'universo.

(Galileo Galilei)